

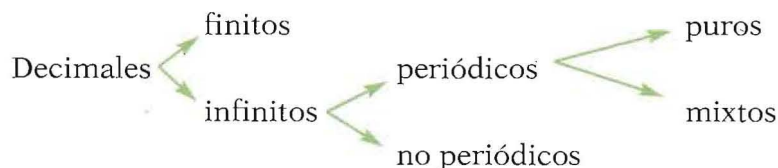
En los cursos anteriores se han estudiado los conjuntos numéricos. Así, se definieron los conjuntos \mathbb{N} de los números naturales; \mathbb{N}_0 , de los números naturales y el cero; \mathbb{Z} , de los números enteros, y \mathbb{Q} , de los números racionales, como sigue:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}; \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Además, los números del conjunto \mathbb{Q} se pueden representar, en forma decimal, conformando una clasificación importante:



Dentro de esta clasificación, llaman particularmente la atención los decimales infinitos no periódicos, pues estos números no tienen una representación de la forma $\frac{a}{b}$, representación racional; por esta razón estos decimales forman el conjunto de los números irracionales, notado con la letra \mathbb{I} . Algunos números irracionales son: $\sqrt{2} = 1,4142\dots$, $\pi = 3,1415\dots$ entre otros.

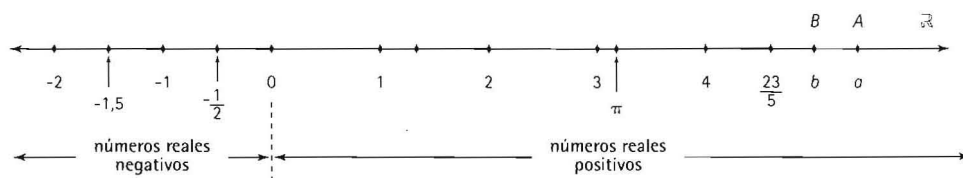
El conjunto de los números racionales \mathbb{Q} unido con el conjunto de los números irracionales \mathbb{I} , forma el conjunto de los números reales \mathbb{R} .

Así,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Los números reales se pueden representar utilizando puntos sobre la *recta real*, de modo que a cada número real, a , le corresponde exactamente un punto de la recta, y a cada punto P , en la recta, le corresponde un número real a .

A esto se le llama *correspondencia uno a uno o correspondencia biunívoca*. En la siguiente recta real se pueden observar algunos números reales.



Al representar una mayor cantidad de números reales en un intervalo, se puede observar, informalmente, que entre dos números reales siempre va a ubicarse otro número real. A esta propiedad se le llama *densidad*.

Intervalo o pareja ordenada

El intervalo abierto (a, b) utiliza la misma notación que la pareja ordenada (a, b) . No obstante, siempre debe quedar claro, a partir del contexto de un problema, si se está hablando de un intervalo o de una pareja ordenada.



Figura 1



Figura 2

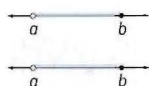


Figura 3

Actualidad

Los símbolos ∞ y $-\infty$ no representan números; son simplemente símbolos que nos recuerdan que el intervalo continúa por siempre, aumenta o disminuye sin fin. Por lo tanto, siempre se escribe un paréntesis junto al símbolo ∞ .

3.1 DESIGUALDADES EN \mathbb{R}

Intervalo

Un intervalo es un subconjunto de los números reales.

Los intervalos se clasifican en:

- Intervalo abierto: (a, b)

Notación de conjuntos: $\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ (figura 1)

Representa todos los números reales que están entre a y b sin incluir a a y a b .

- Intervalo cerrado: $[a, b]$

Notación de conjuntos: $\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$ (figura 2)

Representa todos los números reales que están entre a y b incluyendo a a y a b .

- Intervalos semiabiertos: $(a, b]$ o $[a, b)$

Notación de conjuntos: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$; $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$ (figura 3)

Representa todos los números reales que están entre a y b incluyendo a a o a b .

- Intervalos infinitos:

Notación: $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$; Gráfica:



Representa todos los números reales mayores que a .

Notación: $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$; Gráfica:



Representa todos los números reales mayores que a incluyendo a a .

Notación: $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$; Gráfica:



Representa todos los números reales menores que b .

Notación: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$; Gráfica:



Representa todos los números reales menores que b incluyendo a b .

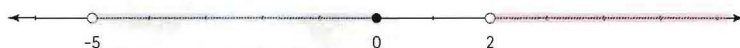
El intervalo $(-\infty, \infty)$ representa el conjunto de los números reales \mathbb{R} y corresponde a toda la recta real.

Operaciones con intervalos

Como los intervalos son subconjuntos del conjunto de los números reales, entonces las operaciones unión, intersección y diferencia también están definidas en dichos subconjuntos.

Por ejemplo, los intervalos $(-5, 0] \cup (2, \infty)$ corresponde a todos los números reales entre -5 y 0 , así como los números reales mayores que 2 .

Gráficamente:



Inecuaciones

Propiedades de las desigualdades

1. Si $a < b$, $b < c$, entonces $a < c$.
2. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$.
3. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
4. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Una desigualdad en donde intervienen una o más variables, se conoce con el nombre de inecuación.

Resolver una inecuación es hallar los valores de la variable que hacen cierta la desigualdad. Al conjunto de dichos valores se le llama **conjunto solución**.

Por ejemplo, la desigualdad $x + 3 < 7 - x$ es una inecuación.

Al resolver esta inecuación se obtiene la expresión $x < 2$, es decir, el conjunto solución de $x + 3 < 7 - x$ es $S = \{x \in \mathbb{R} / x < 2\}$.

Esta solución está representada por el intervalo $(-\infty, 2)$.

Gráficamente: 

Inecuaciones cuadráticas

Una inecuación cuadrática es una desigualdad que, simplificada, tiene la forma:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &> 0 & \text{ o } & ax^2 + bx + c \geq 0 \\ ax^2 + bx + c &< 0 & \text{ o } & ax^2 + bx + c \leq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo

Hallar el conjunto solución de cada inecuación.

a. $x^2 - x - 6 < 0$

b. $\frac{(x+2)(3-x)}{(x+1)(x^2+1)} \geq 0$

Solución

a. Al factorizar la expresión se tiene que

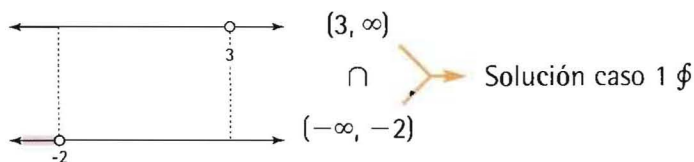
$$x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) < 0$$

Como el producto $(x-3)(x+2)$ es menor que cero, se dan dos casos.

- Caso 1. $(x-3) > 0 \wedge (x+2) < 0$

$$\begin{aligned} x-3 &> 0 \\ x &> 3 \end{aligned}$$

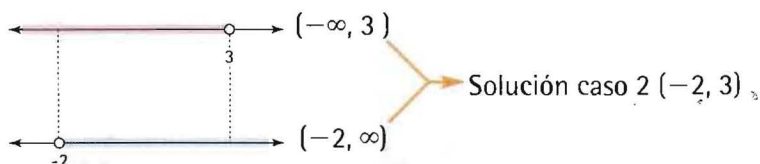
$$\begin{aligned} x+2 &< 0 \\ x &< -2 \end{aligned}$$



- Caso 2. $(x-3) < 0 \wedge (x+2) > 0$

$$\begin{aligned} x-3 &< 0 \\ x &< 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2 &> 0 \\ x &> -2 \end{aligned}$$



Comportamiento de la inecuación

$(x-3)(x+2) < 0$ en los intervalos definidos en los casos 1 y 2.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, \infty)$
$(x-3)$	Negativo	Negativo	Positivo
$(x+2)$	Negativo	Positivo	Positivo
$(x-3)(x+2)$	Positivo	Negativo	Positivo

$$(x-3)(x+2) < 0$$

La solución de la inecuación es la unión de las soluciones del caso 1 y el caso 2.

$$\text{Solución: } \phi \cup (-2, 3) = (-2, 3)$$

$$b. \frac{(x+2)(3-x)}{(x+1)(x^2+1)} \geq 0$$

Es importante tener en cuenta que en la expresión

$$\frac{(x+2)(3-x)}{(x+1)(x^2+1)} \geq 0 \quad (x+1)(x^2+1) \neq 0$$

Como el producto es mayor que cero se presentan dos casos.

$$\bullet \text{ Caso 1. } (x+2)(3-x) \geq 0 \wedge (x+1)(x^2+1) > 0$$

En cada una de las inecuaciones dadas en este caso se presentan, a su vez, dos casos más, así:

Caso 1.1

$$\{(x+2) \geq 0 \wedge (3-x) \geq 0\} \vee \{(x+2) \leq 0 \wedge (3-x) \leq 0\}$$

$$x \geq -2 \wedge 3 \geq x \vee x \leq -2 \wedge 3 \leq x$$

$$[-2, \infty) \cap (-\infty, 3] = [-2, 3] \quad (-\infty, -2] \cap [3, \infty) = \phi$$



$$\text{Solución caso 1.1: } [-2, 3] \cup \phi = [-2, 3]$$

Caso 1.2

$$\{(x-1) > 0 \wedge (x^2+1) > 0\} \vee \{(x+1) < 0 \wedge (x^2+1) < 0\}$$

La expresión $x^2 + 1$ siempre es mayor que cero, luego, la solución en $x^2 + 1 > 0$ es $(-\infty, \infty)$ y la solución en $x^2 + 1 < 0$ es ϕ

$$(x+1) \geq 0 \wedge (x^2+1) \geq 0 \vee (x+1) < 0 \wedge (x^2+1) \leq 0$$

$$x \geq -1 \quad x < -1$$

$$(-1, \infty) \cap (-\infty, \infty) = (-1, \infty) \quad (-\infty, -1) \cap \phi = \phi$$



$$\text{Solución caso 1.2: } (-1, \infty) \cup \phi = (-1, \infty)$$

$$\text{Solución caso 1: } [-2, 3] \cap (-1, \infty) = (-1, 3]$$



En conclusión, la solución del caso 1 es el intervalo $(-1, 3]$.

$$\bullet \text{ Caso 2. } (x+2)(3-x) \leq 0 \wedge (x+1)(x^2+1) \leq 0$$

Realizando un proceso similar al efectuado en el caso 1, se obtienen las soluciones de los casos 2.1 y 2.2:

Solución caso 2.1 $(-\infty, -2] \cup (3, \infty)$ Solución caso 2.2 $(-\infty, -1]$ Solución caso 2 $\{(-\infty, -2] \cup (3, \infty)\} \cap (-\infty, -1] = (-\infty, -2]$

En conclusión los valores para los cuales la expresión

$$\frac{(x+2)(3-x)}{(x+1)(x^2+1)} \geq 0$$

Se encuentra en la unión de los intervalos solución de los casos 1 y 2.

Solución $(-\infty, -2] \cup (-1, 3]$

Práctica 6

● INTERPRETATIVA ● PROPOSITIVA ● ARGUMENTATIVA

1. Dados los siguientes intervalos:

$$A = [-5, 3], B = (-3, 5] \text{ y } C = (-\infty, 2].$$

Realizar las operaciones indicadas y escribir los intervalos resultantes.

- | | | |
|---------------|------------------------|--------------------|
| a. $A \cup B$ | f. $B - A$ | k. $B \triangle A$ |
| b. $B \cup C$ | g. $C - A$ | l. $A \triangle C$ |
| c. $A \cup C$ | h. $(B \cup A) - C$ | m. $B \triangle C$ |
| d. $A \cap B$ | i. $(A \cup C) - B$ | n. $(B - C)'$ |
| e. $B \cap C$ | j. $(A \cup B) \cup C$ | o. $(A \cup C)'$ |

2. Escribir intervalos A y B tales que el resultado de realizar la operación indicada entre ellos, sea el intervalo que se muestra en cada gráfica.

a. $A \cup B$ b. $B \cap A$ c. $A - B$ d. $(B - A)'$ e. $(A \cap B)'$ 

3. Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones en \mathbb{R} .

a. $x - 2 \leq 8$

b. $x - 3 < 2x + 8$

c. $5x + 2 > 3x - 1$

d. $4x + 6 \leq 2x + 6$

e. $\frac{x-3}{3} + \frac{5}{4} < \frac{x}{12} + \frac{2x+9}{15}$

f. $-5 < \frac{4-3x}{3} < 1$

g. $5x - 4 < 3x < 2x + 1$

h. $9x - 2 < 8x > 3x + 2$

i. $x^2 + 2x > 3$

j. $8x + 4 > 2x + 10 > 5x - 4$

k. $2 < \frac{x+6}{2} < 5$

l. $9x < \frac{2x+3}{5} < \frac{7x+8}{3}$

4. Resolver las inecuaciones:

a. $x^2 + 2x < 3$

h. $3(x+3)(x+1)(x-2) > 0$

b. $x^2 - 8 < 2x$

i. $(x^2 - 3 + 2x)(3x - 4 - x^2) > 0$

c. $3x^2 - 10x \leq 0$

j. $(x+1)^4 \leq (x+1)^2$

d. $6x^2 - 5 < x$

k. $-2(x+2)^2(x-5) \geq 0$

e. $x^2 - 6x \geq -8$

l. $(3x+1)(x+2)(x-1) \leq 0$

f. $\frac{x-2}{x+3} \geq 2$

m. $\frac{6}{x-1} - \frac{5}{x-2} > -2 \geq 0$

g. $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 3x + 2}$

n. $3x - 6 \leq 2 - \frac{36}{3x+4}$

3.2 VALOR ABSOLUTO

Se llama *valor absoluto* de a al número no negativo, simbolizado $|a|$ que cumple:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Ecuaciones con valor absoluto

Para solucionar ecuaciones con valor absoluto se utilizan las siguientes propiedades:

- $|x| = a \Leftrightarrow a \geq 0, \wedge, x = a, \vee, x = -a$
- $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a, \vee, x = -a$

Ejemplo

Hallar los valores de x que satisfacen las siguientes ecuaciones:

a. $|3x - 7| = 12$ b. $|3x - 5| = 7 - x$ c. $|x - 2| = |3 - 2x|$

Solución

a. Siendo $12 > 0$, se cumple la primera propiedad.

$$\begin{array}{ccc} 3x - 7 = 12 & \text{ó} & 3x - 7 = -12 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x = \frac{19}{3} & \text{ó} & x = -\frac{5}{3} \end{array}$$

Luego, los valores de x que satisfacen la ecuación son: $\left\{\frac{19}{3}, -\frac{5}{3}\right\}$

b. $|3x - 5| = 7 - x$

Como el valor absoluto siempre es un número positivo o cero, necesariamente $7 - x \geq 0$. Así, la ecuación se cumple si se presentan tres condiciones:

$$\begin{array}{ccc} 7 - x \geq 0 & \text{y} & 3x - 5 = 7 - x \quad \text{ó} \quad 3x - 5 = -7 + x \\ x \leq 7 & \text{y} & x = 3 \quad \text{ó} \quad x = -1 \end{array}$$

Luego, la solución es la intersección de la desigualdad y los valores de x .

$$\{x \in \mathbb{R} / x \leq 7\} \cap \{-1, 3\} = \{-1, 3\}$$

c. $|x - 2| = |3 - 2x|$

Solución

$$|x - 2| = |3 - 2x| \Leftrightarrow x - 2 = 3 - 2x \text{ ó } x - 2 = -(3 - 2x) \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \text{ ó } x = 1$$

luego, la solución es el conjunto $\left\{\frac{5}{3}, 1\right\}$

Propiedades de las inecuaciones con valor absoluto

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \text{ con } a \geq 0$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ ó } x \leq -a$$

$$|x| \leq |a| \Leftrightarrow x^2 \leq a^2$$

Inecuaciones con valor absoluto

En la solución de inecuaciones con valor absoluto se deben tener en cuenta las propiedades que se mencionan a la izquierda.

Ejemplo

Determinar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones. Luego, representar gráficamente la solución.

a. $|2x - 3| \leq 3x - 8$ b. $|5 - 3x| > 2x + 6$ c. $|5x - 3| \leq |5x + 5|$

Solución

a. Aplicando la primera propiedad, se tiene:

$$\begin{aligned} |2x - 3| \leq 3x - 8 &\Leftrightarrow -(3x - 8) \leq 2x - 3 \leq 3x - 8 && \text{y } 3x - 8 \geq 0 \\ -3x + 8 \leq 2x - 3 \leq 3x - 8 &&& \text{y } x \geq \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Para analizar la expresión $-3x + 8 \leq 2x - 3 \leq 3x - 8$ se separa la inecuación en dos inecuaciones.

$$\begin{aligned} -3x + 8 \leq 2x - 3 &\text{ y } 2x - 3 \leq 3x - 8 \\ x \geq \frac{11}{5} &\text{ y } x \geq 5 \end{aligned}$$

En conclusión, la solución de $|2x - 3| \leq 3x - 8$ está formada por

$$\begin{aligned} x \geq \frac{11}{5} &\text{ y } x \geq 5 && \text{y } x \geq \frac{8}{3} \\ \left[\frac{11}{5}, \infty\right) \cap [5, \infty) \cap \left[\frac{8}{3}, \infty\right) &= [5, \infty) \end{aligned}$$

Gráficamente



b. Aplicando la segunda propiedad,

$$\begin{aligned} |5 - 3x| > 2x + 6 &\Leftrightarrow 5 - 3x > 2x + 6 \quad \text{ó} \quad 5 - 3x < -(2x + 6) \\ x < -\frac{1}{5} &\quad \text{ó} \quad x > 11 \end{aligned}$$

En conclusión, la solución de $|5 - 3x| > 2x + 6$ está formada por

$$\begin{aligned} x < -\frac{1}{5} &\text{ ó } x > 11 \\ \left(-\infty, -\frac{1}{5}\right) \cup (11, \infty) \end{aligned}$$

Gráficamente



c. Aplicando la tercera propiedad,

$$\begin{aligned} |5x - 3| \leq |3x + 5| &\Leftrightarrow (5x - 3)^2 \leq (3x + 5)^2 \\ \Leftrightarrow x &\geq -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Luego, la solución es $\left[-\frac{1}{5}, \infty\right)$

Gráficamente



1. Hallar el conjunto solución de cada ecuación.

- a. $|x + 3| = 4$ f. $||x| - 1| = |2x + 2|$
 b. $|2x - 1| = 5$ g. $|2x - 3| - 1 = |x - 3|$
 c. $|3x - 2| = x + 1$ h. $|x - 5| + |6 - 4x| = 2$
 d. $2 + |x + 4| = 5x + 2$ i. $||x + 2| + 4| = ||x + 3||$
 e. $\frac{|4x + 6|}{x + 4} = 2$ j. $\left| \frac{3x + 8}{2x + 3} \right| = 4$

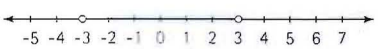
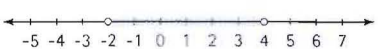
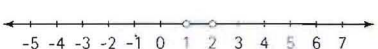
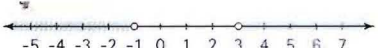
2. Para cada caso encontrar δ , que depende de ϵ , tal que:

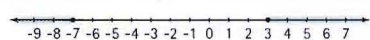
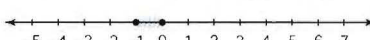
- a. $|x - 5| < \delta \Rightarrow |3x - 15| < \epsilon$
 b. $|x - 2| < \delta \Rightarrow |4x - 8| < \epsilon$
 c. $|x - 6| < \delta \Rightarrow |6x - 36| < \epsilon$
 d. $|x - 1| < \delta \Rightarrow |5x - 5| < \epsilon$

3. Hallar el conjunto solución de cada inecuación.

- a. $|x - 1| < 3$
 b. $|2x + 3| < 5$
 c. $|4x + 6| > 12$
 d. $|x + 8| < |3x + 5|$
 e. $|7x + 6| < |2x - 1|$
 f. $|x + 2| + 2|x| < 5$
 g. $\left| \frac{-1}{2 + x} \right| \geq \frac{1}{6}$
 h. $\frac{|x + 4| - |x - 5|}{x - 7} \leq 1$
 i. $\frac{|x^2 - 2| + x}{x + 2} \leq 3$

4. Relacionar cada inecuación con su respectiva solución gráfica.

- a.  () $|x + 2| \geq 5$
 b.  () $|x - 1| < 3$
 c.  () $|x| < 3$
 d.  () $|2x + 1| \leq 1$

- e.  () $|3 - 2x| < 1$
 f.  () $|x - 1| > 2$

5. El valor absoluto de un número real x se puede definir también como

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Utilizar esta definición para demostrar que $|x - 2| < |x|$ tiene solución $x \geq 1$.

6. ¿Qué valores debe tomar x para que la expresión $\frac{1}{|x| - x}$ esté definida? ¿Por qué?

7. Demostrar que:

Si $|x| \leq 1$, entonces, $\left| x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16} \right| < 2$

8. Resolver los siguientes problemas.

- a. La necesidad diaria de agua calculada para cierta ciudad está dada por

$$|g - 3.725.000| \leq 100.000$$

donde g es el número de galones de agua utilizados por día. Hallar la mayor y la menor necesidad diaria de agua.

- b. El peso p de tres cuartas partes de los tarros de café llenados por un procesador de alimentos satisfacen la desigualdad.

$$\left| \frac{p - 16}{0,05} \right| \leq 1$$

donde p se mide en onzas. Determinar el intervalo en el cual se halla p .

- c. Se especifica que una parte exacta de un motor pequeño tiene un diámetro de 0,623 cm. Para que la parte encaje correctamente, su diámetro debe estar a 0,005 cm del diámetro especificado.

Escribir una inecuación con valor absoluto que tenga como solución todos los diámetros posibles de las partes que encajarán. Luego, determinar esos diámetros.

- d. En cierta ciudad la temperatura t (en grados) está dada por la fórmula

$$|3t - 15| < 10$$

Determinar entre qué rango se encuentra la temperatura de esa ciudad.